

I. Taux de variation et nombre dérivé

1. Taux de variation d'une fonction entre deux réels

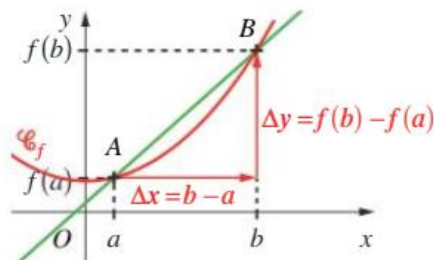
Définition

On considère une fonction f définie sur un Intervalle I .

Soient a et b deux nombres réels distincts appartenant à I .

Le taux de variation (ou taux d'accroissement) de f entre a et b est le nombre réel égal à :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Interprétation géométrique

On considère, dans un repère du plan, les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ de la courbe représentative de f .

Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB) .

En effet, on a :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interprétation cinématique

Étant donné un mobile M se déplaçant sur un axe (Ox) , on repère la position de ce mobile à l'instant t par la distance $d(t)$ entre ce point et l'origine O de l'axe. Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et t_1 (pour $t_0 \neq t_1$) est égal à la **vitesse moyenne** du mobile entre les instants t_0 et t_1 :

En effet, on a :
$$v_m = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{d(t_1) - d(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Exemples

Soit $f : x \mapsto x^2$

- Le taux de variation de f entre 1 et 3 est :

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

- Le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{3^2 + 2 \times 3h + h^2 - 3^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$$

Application

Déterminer le taux d'accroissement de $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ entre 2 et $2+h$.

2. Notion de nombre dérivé

Définition

On considère une fonction f définie sur un Intervalle I .

Soit a un nombre réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f entre les réels a et $a+h$ se rapproche d'un nombre réel L quand h se rapproche de 0.

Le réel L , limite du taux de variation lorsque h tend vers 0, est appelé nombre dérivé de la fonction f en a .

On le note $f'(a)$. On écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple

- Pour $f(x) = x^2$, on a vu que le taux de variation de f entre 3 et $3+h$ est $\tau(h) = 6+h$.

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$. Donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

- Pour $g(x) = \frac{1}{x}$, on a vu que le taux de variation de g entre 2 et $2+h$ est

$$\tau(h) = \frac{-1}{2(2+h)}.$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = \frac{-1}{4}$. Donc g est dérivable en 2 et $g'(2) = \frac{-1}{4}$.

- Pour $h(x) = \sqrt{x}$, le taux de variation de h entre 0 et $0+h$ est $\tau(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Lorsque h se rapproche de 0, $\tau(h)$ devient de plus en plus grand, donc ne tend pas vers un nombre. Donc la fonction racine carré n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1

Soient les fonctions f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et g définie sur $]2; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{3}{x-2}.$$

1. a. Soit h un réel non nul. Exprimer, en fonction de h , le taux de variation de la fonction f entre 2 et $2+h$. Dans la suite, on notera $\tau(h)$ ce taux de variation.

b. Déterminer la limite de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0.

c. En déduire que la fonction f est dérivable en 2 et préciser la valeur de $f'(2)$.

d. Retrouver la valeur de $f'(2)$ à l'aide de la calculatrice.

2. a. Soit h un réel non nul tel que $h > 2$. Montrer que le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction g entre 3 et $3+h$ est égal à $\tau(h) = \frac{-3}{h+1}$.

b. Montrer alors que la fonction g est dérivable en 3 et préciser la valeur de $g'(3)$.

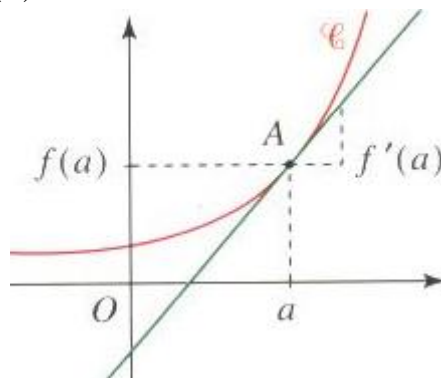
II. Tangente à une courbe en un point

1. Notion de tangente

On considère une fonction f définie sur un intervalle I , a un réel de cet intervalle et C_f la courbe représentative de la fonction f .

Définition

Si f est dérivable en a , on appelle tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



2. Équation réduite de la tangente

Propriété

L'équation réduite de la tangente en A dans le repère (O, I, J) est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Démonstration

Notons T la tangente à la courbe C_f en A .

Le coefficient directeur de T étant $f'(a)$, T admet une équation de la forme $y = f'(a)x + b$ où b est un réel que l'on détermine en écrivant que les coordonnées de A vérifient cette équation, c'est-à-dire :

$$f(a) = f'(a)a + b.$$

On en déduit que $b = f(a) - af'(a)$, d'où l'équation de la tangente au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. On veut déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

$$\tau(h) = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$$

$\lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

$$f(1) = 1^2 = 1.$$

Donc l'équation de la tangente est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 2(x-1) + 1$$

$$y = 2x - 1$$

Exercice 2

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -2 .

2. Déterminer la position relative entre C_f et T .

Exercice 3 sur déclin : Lecture graphique de tangente et mise en situation

3 p 75

7 p 78

9 p 79

37 p 86 (+ équation des tangentes)