Etude d'une loi binomiale avec le TInspire

Soit X une variable aléatoire. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètre $p = 0{,}4$ et $n = 10$.

(On note aussi $X \sim B(10; 0{,}4)$)

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) Déterminer l'expression de F, la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F.

3°) Calculer l'espérance de X.

4°) Calculer l'écart type de X.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X.

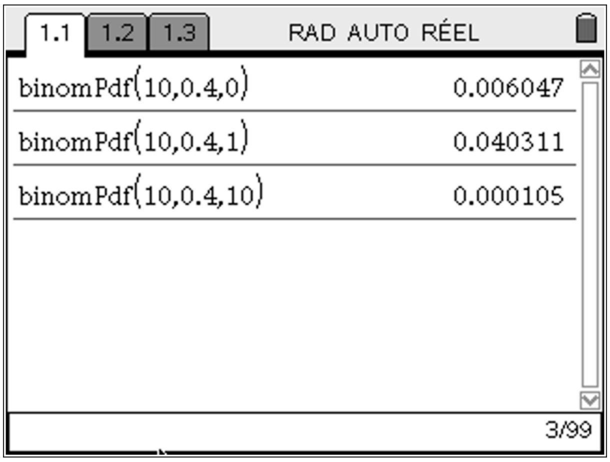
X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}4$.

La TI*n*spire permet de calculer directement les valeurs de $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (pour $0 \leq k \leq n$) et de dresser la loi de probabilité de X :

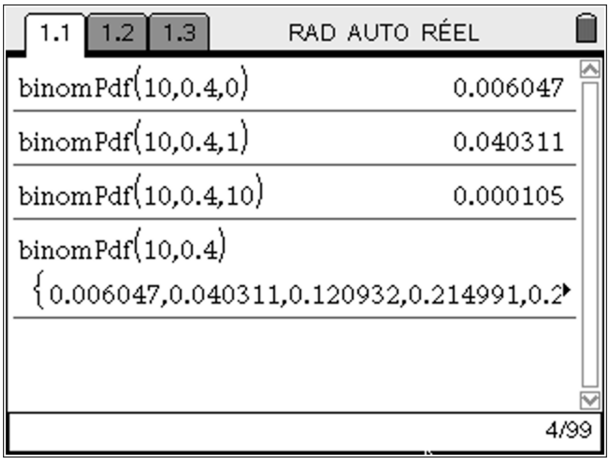
La valeur de $p(X = k)$ est obtenue

- Soit en tapant directement la commande binomPdf(10,0.4, k).
- Soit en tapant menu **Probabilité | Distributions | Binomiale DdP** et en complétant la boite de dialogue.

binomPdf(10,0.4, $\mathbf{0}$) correspond à $p(X = \mathbf{0})$
binomPdf(10,0.4, $\mathbf{1}$) correspond à $p(X = \mathbf{1})$
…
binomPdf(10,0.4, $\mathbf{10}$) correspond à $p(X = \mathbf{10})$



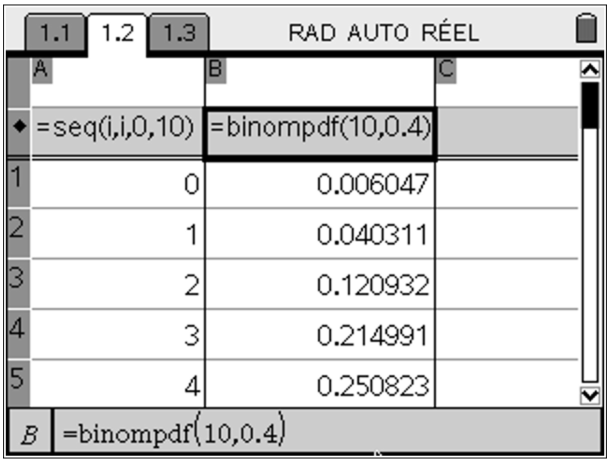
Si on tape seulement **binomPdf(10, 0.4)** on obtient la liste de toutes les valeurs de $p(X = k)$ pour $0 \leq k \leq n$:



On peut aussi afficher toutes ces valeurs directement dans le tableur, ce qui nous donnera la loi de probabilité de X :

Dans la colonne A on entre $=$ **seq(*i*, *i*, 0, 10)** pour avoir toutes les valeurs de 0 à 10.

Dans la colonne B on entre $=$ **binomPdf(10, 0.4)**

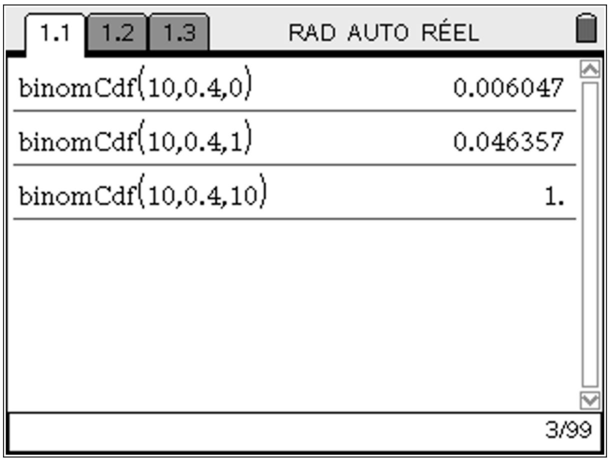


2°) Déterminer l'expression de F, la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F.

On va calculer $p(X \leq k)$:

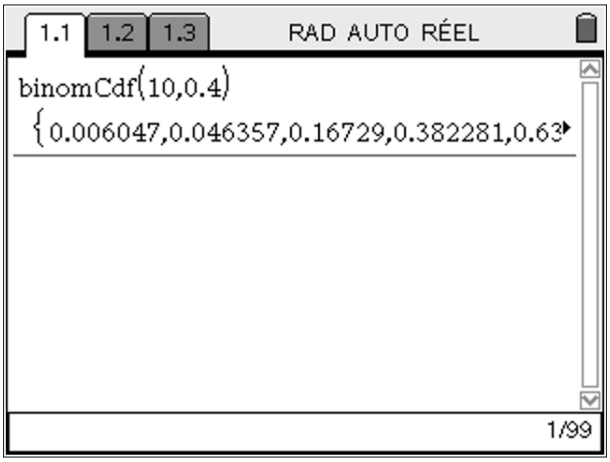
Pour calculer une valeur de la fonction de répartition de X, c'est-à-dire $p(X \leq k)$ on peut :

- Soit taper directement la commande binomCdf(10,0.4, k).
- Soit en tapant (menu) **Probabilité | Distributions | Binomiale FdR** et en complétant la boite de dialogue.



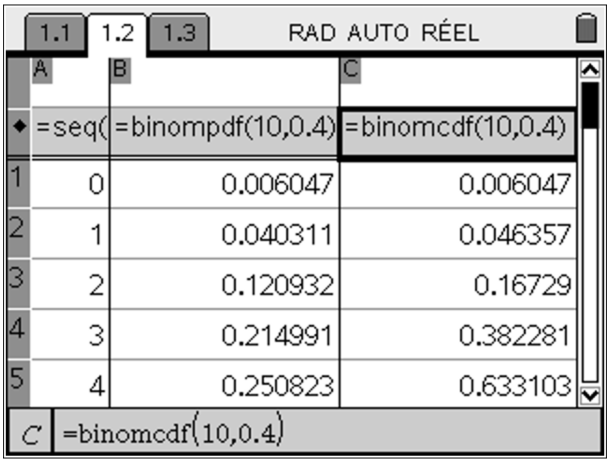
binomCdf(10,0.4, $\mathbf{0}$) correspond à $p(X \leq \mathbf{0})$
binomCdf(10,0.4, $\mathbf{1}$) correspond à $p(X \leq \mathbf{1})$
…
binomCdf(10,0.4, $\mathbf{10}$) correspond à $p(X \leq \mathbf{10})$

Si on tape seulement $\mathbf{binomCdf(10, 0.4)}$ on obtient la liste de toutes les valeurs de $p(X \leq k)$ pour $0 \leq k \leq n$ (ici $n = 10$) :



On peut compléter note feuille de calcul en entrant dans la colonne C :

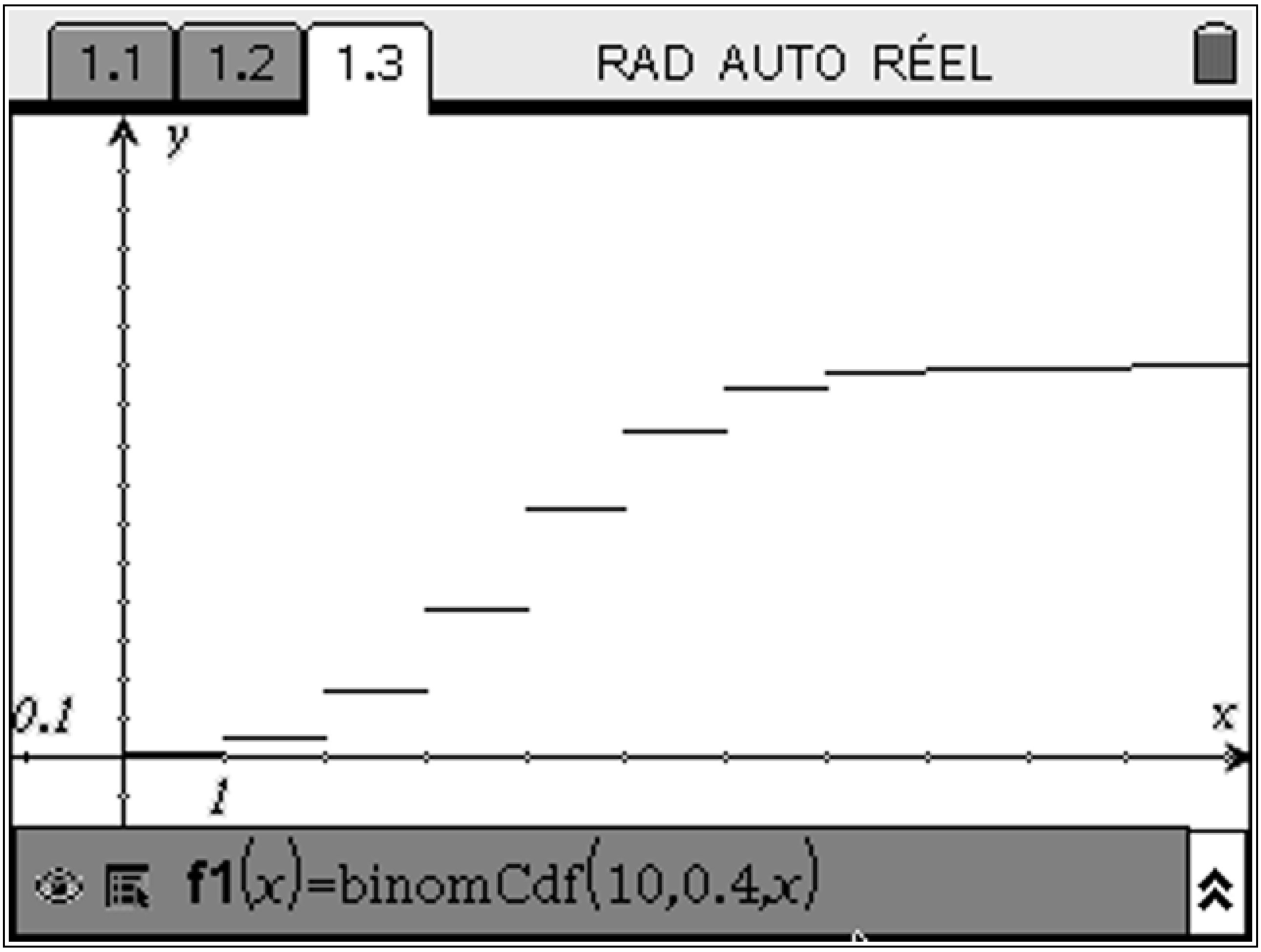
$= \mathbf{binomCdf(10, 0.4)}$



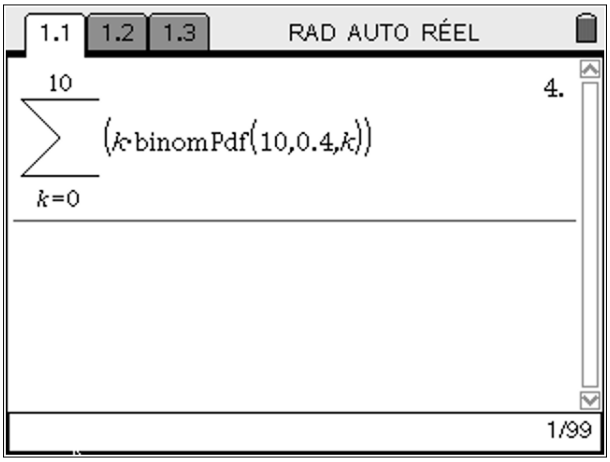
On peut aussi calculer $p(a \leq X \leq b)$, par exemple si on souhaite obtenir la valeur de $p(2 \leq X \leq 6)$ on entre $\mathbf{binomCdf(10, 0.4, 2, 6)}$:

binomCdf(10,0.4,2,6) 0.898881

Représentation graphique de la fonction de répartition F.



3°) Calculer l'espérance de X.



D'après le cours, le calcul d'espérance de X est simple puisque $E(X) = np$.
Cependant, on peut aussi la calculer en utilisant la définition de E :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times p(X = k)$$

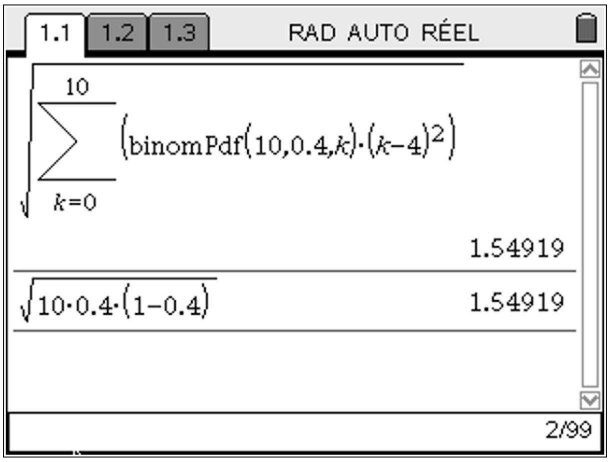
Dans les deux cas on trouve 4.

4°) Calculer l'écart type de X.

D'après le cours, on sait que $V(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Cependant, on peut aussi la calculer en utilisant la définition de V :

$$V(X) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} p(X = k) \times \left(k - E(X)\right)^2}$$

Dans les deux cas on trouve le même résultat..

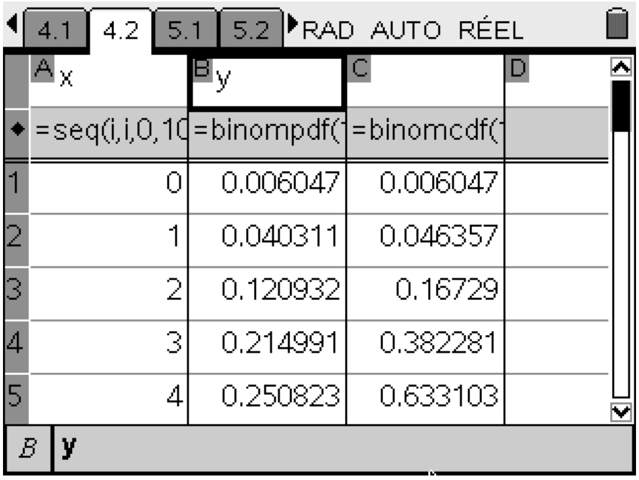


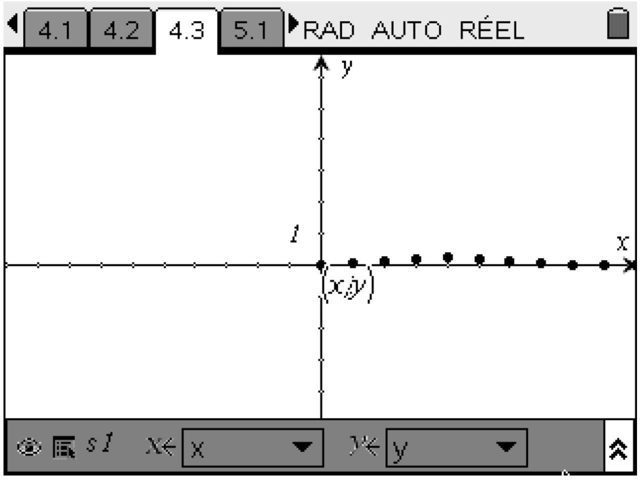
COMPLEMENT

Représentation graphique

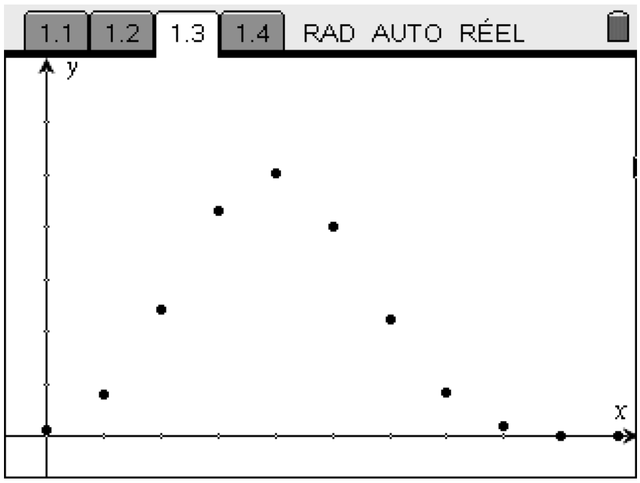
Il peut être intéressant de représenter graphiquement le nuage de points $\left(k, p(X = k)\right)$ pour $0 \leq k \leq n$ pour visualiser graphiquement la convergence de la loi binomiale vers la loi normale.

En reprenant la loi de X obtenue dans la feuille de calcul précédente, on nomme x et y respectivement les colonnes A et B, puis dans une nouvelle feuille Graphique & Géométrie on affiche le nuage de points (x, y).





Il faut modifier l'affichage de la fenêtre pour obtenir un graphique satisfaisant :



Convergence vers la loi normale

Afin de visualiser la convergence de la loi binomiale vers la loi normale il faut modifier un peu la feuille de calculs précédente :

=seq(i,i,0,’n)

=binompdf(’n,0.4)

=max(binompdf(n,0.4))

Puis cellule liée à $\boldsymbol{maximum}$

Cellule liée à $\boldsymbol{n}$

	A x	B y	C	D
◆	=seq(i,i,0,'n)	=binompdf('n,0.4)		
1	0	0.006047	maximum	0.250823
2	1	0.040311	n	10
3	2	0.120932		
4	3	0.214991		
5	4	0.250823		
6	5	0.200658		
7	6	0.111477		
8	7	0.042467		
9	8	0.010617		
10	9	0.001573		
11	10	0.000105		

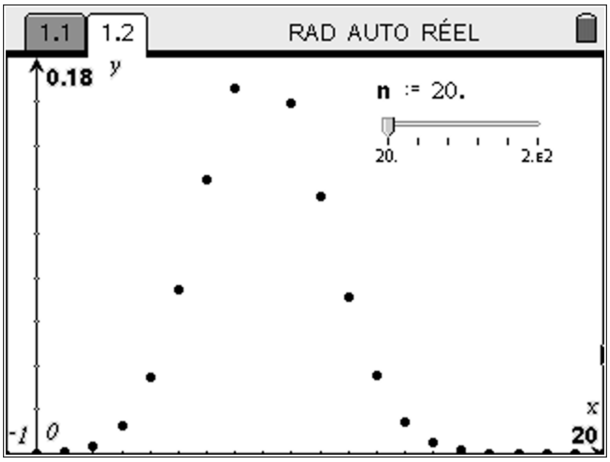
Pour modifier les valeurs de n sur le graphique, il faut :

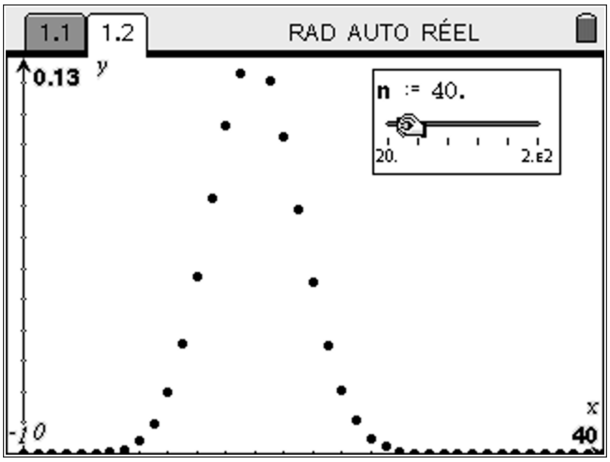
- insérer un curseur (on a choisit 20 pour valeur minimale, 20 pour l’incrémentation et 200 pour valeur maximale de $\boldsymbol{n}$)

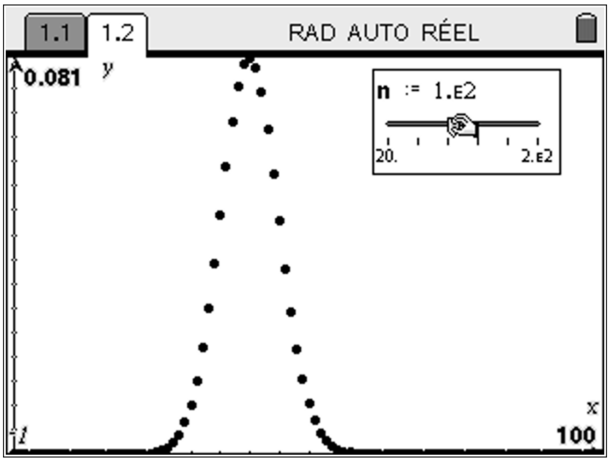
Puis pour modifier automatiquement l’échelle du graphique, il faut :

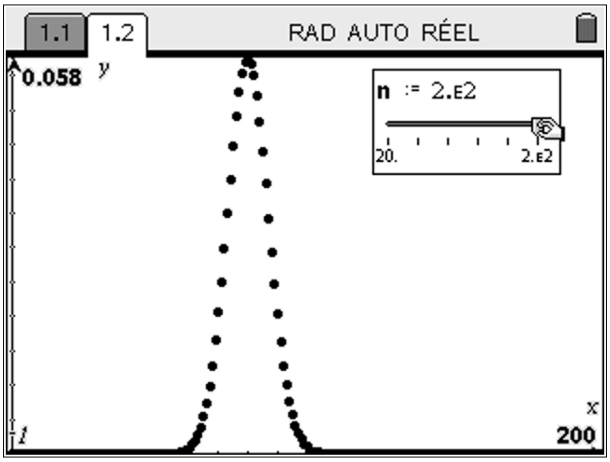
- Afficher les valeurs extrêmes des axes (menu **| Affichage | Afficher les valeurs extrêmes des axes**)
- Lier la valeur maximale de x à la variable $\boldsymbol{n}$
- Lier la valeur maximale de y à la variable $\boldsymbol{maximum}$.
- Entrer -1 pour valeur minimale de x.
- Entrer 0 pour valeur minimale de y.

Pour incrémenter les valeurs de n de 20 en 20, il faut utiliser la flèche de direction ➔









On remarque que la loi binomiale ressemble à une loi normale.

On sait d'après le cours que lorsque n tends vers l'infinie et que p et $1-p$ sont de même ordre de grandeur (dans la pratique lorsque $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$) alors la loi $B(n,p)$ converge vers la loi normale de paramètre $m = np$ et $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$. Appelons Y cette loi normale.

On va représenter graphiquement les 2 nuages de points suivants :

Nuage n°1 : $\left(k, p(X=k)\right)$, $0 \leq k \leq n$ (comme précédemment)

Nuage n°2 : $\left(k, p\left(k-\frac{1}{2} \leq Y \leq k+\frac{1}{2}\right)\right)$ $0 \leq k \leq n$

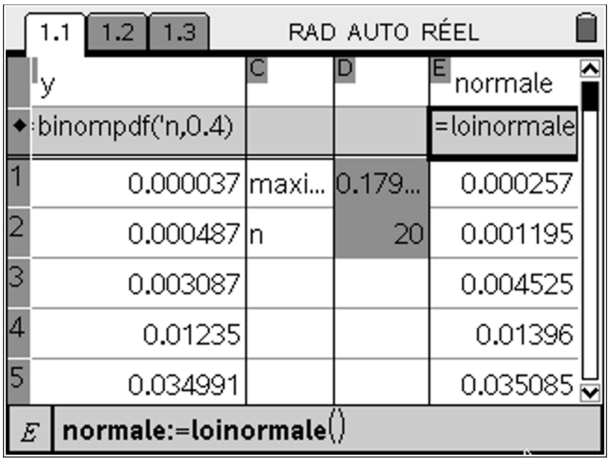
On doit créer une fonction afin de calculer les valeurs de $p\left(k-\frac{1}{2} \leq Y \leq k+\frac{1}{2}\right)$ dans une colonne (car la taille de la colonne doit varier en fonction de n).

On entre le programme suivant :

```
"loinormale" enregistrement effectué
Define loinormale()=
Func
Local i,loi
loi:={ }
For i,0,n
loi:=augment(loi,{normCdf(i-1/2,i+1/2,n·0.4,√(n·0.4·0.6))})
EndFor
Return loi
EndFunc
```

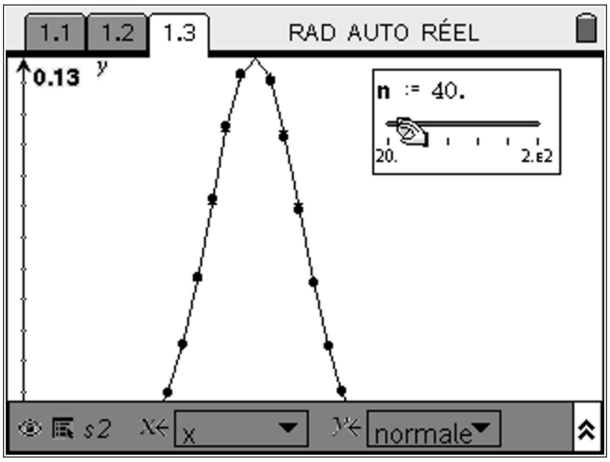
Et dans le tableur, on a choisit la colonne E pour entrer les résultats de notre fonction *loinormale*

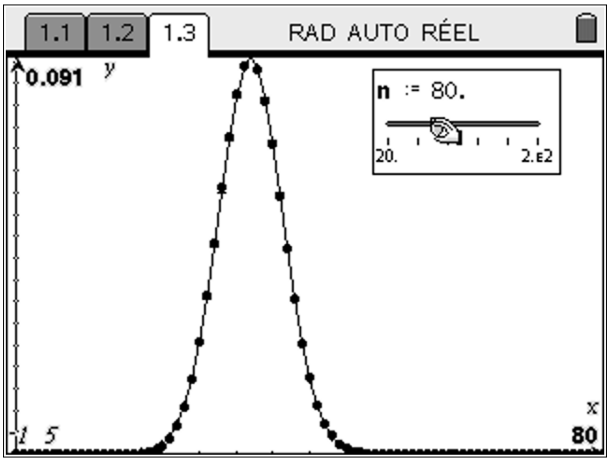
On a nommé cette colonne **normale**.

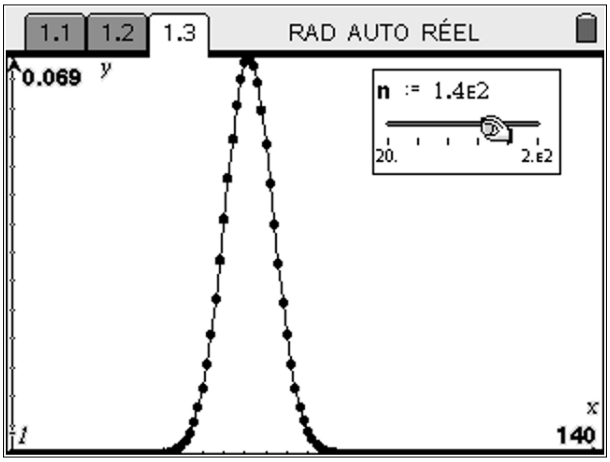


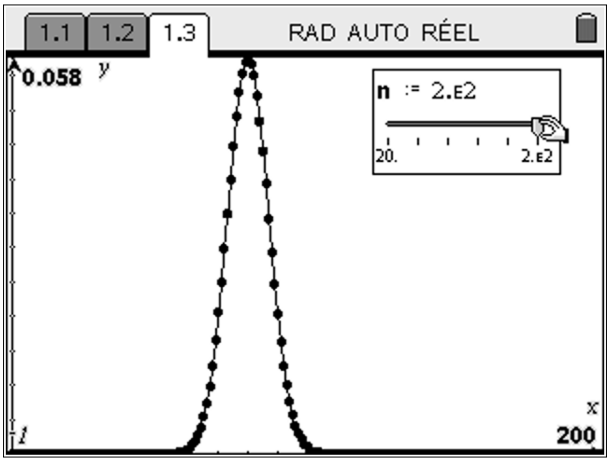
On représente graphiquement le nuage de points $(x, normale)$ qui correspond à

$\left(k, p\left(k - \frac{1}{2} \leq Y \leq k + \frac{1}{2}\right)\right)$. On a choisit de relier ce nuage de points pour le distinguer du précédent.









On peut donc mieux visualiser le phénomène de convergence de la loi binomiale vers la loi normale.